



ce
pre
UNI

CICLO
PREUNIVERSITARIO

2024-1

Álgebra

TEMA FUNCIÓN INVERSA



CONTENIDO

1. Definición de función inversa
2. Propiedades
3. Cálculo de la inversa
4. Representación gráfica de la inversa
5. Ejemplos y ejercicios

FUNCIÓN INVERSA

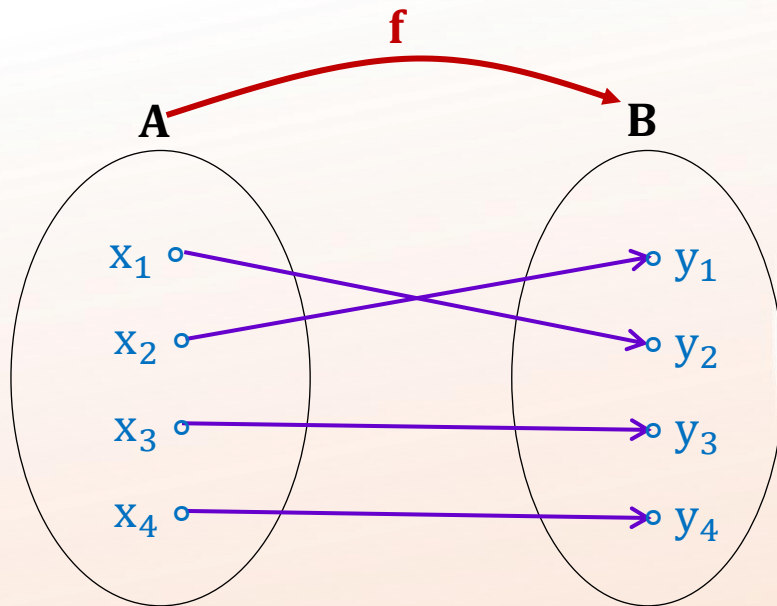
Si $f: A \rightarrow B$ es una función Biyectiva, entonces se define la función Inversa de f como $f^*: B \rightarrow A$

$$y \rightarrow x = f^*(y)$$

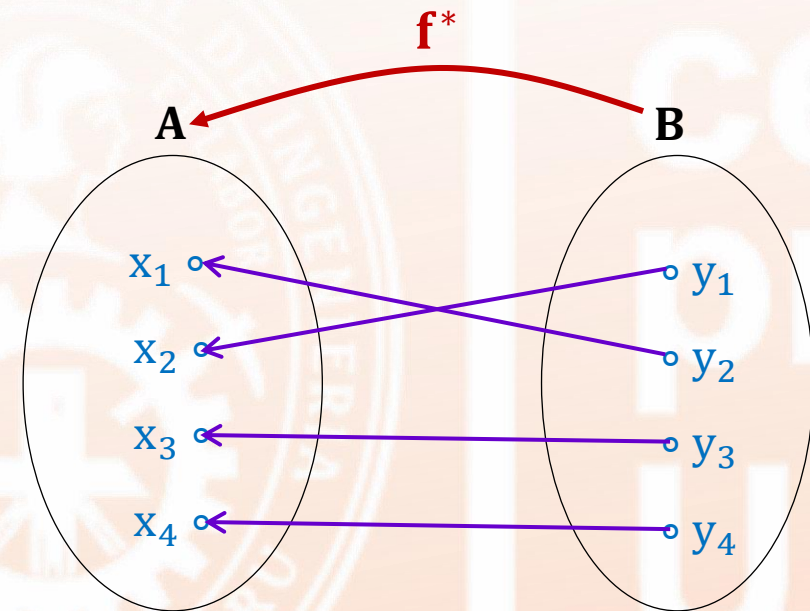
Es decir $\forall y \in B: f^*(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$

De donde: $\text{Dom}(f^*) = \text{Ran}(f) = B$

$\text{Ran}(f^*) = \text{Dom}(f) = A$



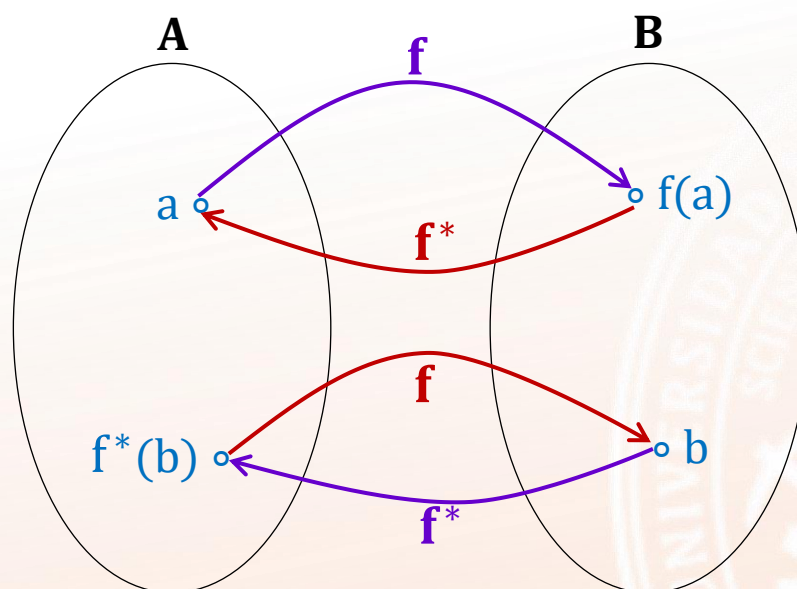
$$f = \{(x_1; y_2); (x_2; y_1); (x_3; y_3); (x_4; y_4)\}$$



$$f^* = \{(y_2; x_1); (y_1; x_2); (y_3; x_3); (y_4; x_4)\}$$

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN INVERSA

1. Si $f: A \rightarrow B$ es invertible : $f(a)=b$ si y solo si $f^*(b) = a$
2. Si $f: A \rightarrow B$ es invertible : $(f^* \circ f)(x) = x; \forall x \in A$
 $(f \circ f^*)(x) = x; \forall x \in B$



3. Si $f: A \rightarrow B$ es invertible, entonces $f^*: B \rightarrow A$ también es invertible.
 Más aún $(f^*)^* = f$.

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN INVERSA

4. Si $f: A \rightarrow B$ es invertible y creciente, entonces f^* también es invertible y creciente.
5. Si $f: A \rightarrow B$ es invertible y decreciente, entonces f^* también es invertible y decreciente.
6. Si $g: A \rightarrow B$ y $f: B \rightarrow C$ son invertibles, entonces $f \circ g: A \rightarrow C$ también es invertible. Más aún $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$

Demostración

$$\text{Si } y = (f \circ g)(x) \rightarrow x = (f \circ g)^*(y) \dots\dots (I)$$

$$y = f(g(x)) \rightarrow g(x) = f^*(y) \rightarrow x = g^*(f^*(y)) = (g^* \circ f^*)(y) \dots\dots (II)$$

$$\text{De (I) y (II) } (f \circ g)^*(y) = (g^* \circ f^*)(y)$$

$$\rightarrow (f \circ g)^* = g^* \circ f^*$$

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN INVERSA

7. Si f y g son invertibles, entonces

a. $h = f \circ g \rightarrow f = h \circ g^* ; \forall x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Ran}(g)$

b. $h = f \circ g \rightarrow g = f^* \circ h ; \forall x \in \text{Dom}(f \circ g)$

Nota: Si f es invertible y acotada, su inversa f^* no siempre está acotada

Ejemplo: $f(x) = \arctan(x), \forall x \in \mathbb{R}$

CÁLCULO DE LA FUNCIÓN INVERSA

Caso 1: Si la función f biyectiva esta expresada en pares ordenados, la obtención de la inversa f^* consiste en conmutar el orden de todos los pares ordenados de f .

Ejemplo

Sea la función Biyectiva $f: \{-1; 0; 2; 4\} \rightarrow \{2; 3; 4; 5\}$

$$f = \{(-1, 2); (0, 4); (2, 3); (4, 5)\}$$

Halle: a) f^*

b) $f^* \circ f$

c) $f \circ f^*$

Solución

a) $f^* = \{(2, -1); (4, 0); (3, 2); (5, 4)\}$

b) $f^* \circ f = \{(-1, -1); (0, 0); (2, 2); (4, 4)\}$

c) $f \circ f^* = \{(2, 2); (4, 4); (3, 3); (5, 5)\}$

Caso 2 : Si la función f es invertible y contamos con el dominio y la regla de correspondencia $y=f(x)$.

- i. Despejar x en función de y , es decir, $x = f^*(y)$.
- ii. Intercambiar las variables.
- iii. Calcular el $\text{Ran}(f)$, pues $\text{Dom}(f^*) = \text{Ran}(f)$.

Ejemplo:

Dada la función $y = f(x) = 2x - 1$; $-1 \leq x < 3$, determine su inversa.

Solución

- i. Despejando x de $y = f(x) = 2x - 1$

$$y = 2x - 1 \rightarrow x = \frac{y + 1}{2}$$

- ii. Intercambiando x por y : $y=f^*(x) = \frac{x+1}{2}$

- iii. Hallando $\text{Ran}(f) = \text{Dom}(f^*) = [f(-1); f(3)) = [-3; 5)$ (Función creciente)

$$\text{Finalmente: } f^*(x) = \frac{x+1}{2}, x \in [-3; 5)$$

Ejemplo

Dada la función $y = f(x) = x^2 - 6x + 8$; $x < 2$, determine su inversa.

Solución

i. Despejando x de $y = (x - 3)^2 - 1$

$$(x - 3)^2 = y + 1 \rightarrow |x - 3| = \sqrt{y + 1}$$

$$-x + 3 = \sqrt{y + 1}$$

$$x = 3 - \sqrt{y + 1}$$

ii. Intercambiando x por y : $y = f^*(x) = 3 - \sqrt{x + 1}$

iii. Hallando $\text{Dom}(f^*) = \text{Ran}(f) = \langle 0; \infty \rangle$ (Función decreciente)

Finalmente: $f^*(x) = 3 - \sqrt{x + 1}$, $x \in \langle 0; \infty \rangle$

Ejemplo

Sea la función f definida por $f(x) = \frac{2x}{x+4}$; $x \neq -4$

Halle: a) f^*

b) $f \circ f^*$

c) $f^* \circ f$

Solución

Nota: Si $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$; $x \neq -\frac{d}{c} \rightarrow f^*(x) = \frac{dx-b}{-cx+a}$; $x \neq \frac{a}{c}$

a) $f^*(x) = \frac{4x}{2-x}$; $x \neq 2$

b) $(f \circ f^*)(x) = f\left(\frac{4x}{2-x}\right) = \frac{2\left(\frac{4x}{2-x}\right)}{\left(\frac{4x}{2-x}\right)+4} = \frac{\frac{8x}{2-x}}{\frac{8}{2-x}} = x$; $x \neq 2$

c) $(f^* \circ f)(x) = f^*\left(\frac{2x}{x+4}\right) = \frac{4\left(\frac{2x}{x+4}\right)}{2-\left(\frac{2x}{x+4}\right)} = \frac{\frac{8x}{x+4}}{\frac{8}{x+4}} = x$; $x \neq -4$

Ejemplo

Sea $f: [-a; \infty) \rightarrow B$, la función invertible definida por $f(x) = x^2 + ax + 3$.

Si $f^*(6) = 3$, determine la función inversa f^* .

Solución

$$f^*(6) = 3 \rightarrow f(3) = 6$$

$$f(3) = 9 + 3a + 3 = 6 \rightarrow a = -2$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2 ; x \geq 2$$

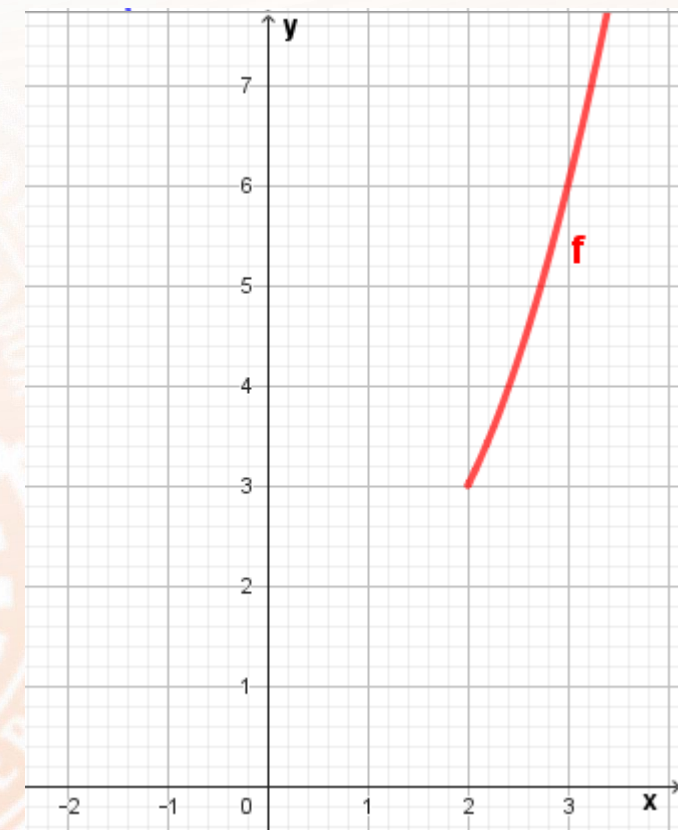
Del grafico $\text{Ran}(f) = \text{Dom}(f^*) = [3; \infty)$

$$f^*: (x - 1)^2 = y - 2 ; x \geq 2$$

$$x - 1 = \sqrt{y - 2} ; x \geq 2$$

$$x = \sqrt{y - 2} + 1 ; x \geq 2$$

$$f^*(x) = \sqrt{x - 2} + 1 ; x \geq 3$$



Nota: Si f es una función biyectiva de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & ; x \in \text{Dom}(f_1) \\ f_2(x) & ; x \in \text{Dom}(f_2) \end{cases}$$

Su inversa se halla calculando la inversa de cada subfunción f_1 y f_2 , en su respectivo dominio.

Esto se puede generalizar para el caso de tres o mas subfunciones.

Ejemplo:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & ; x \leq 1 \\ 5-2x & ; x > 3 \end{cases}$, determine su inversa.

Solución

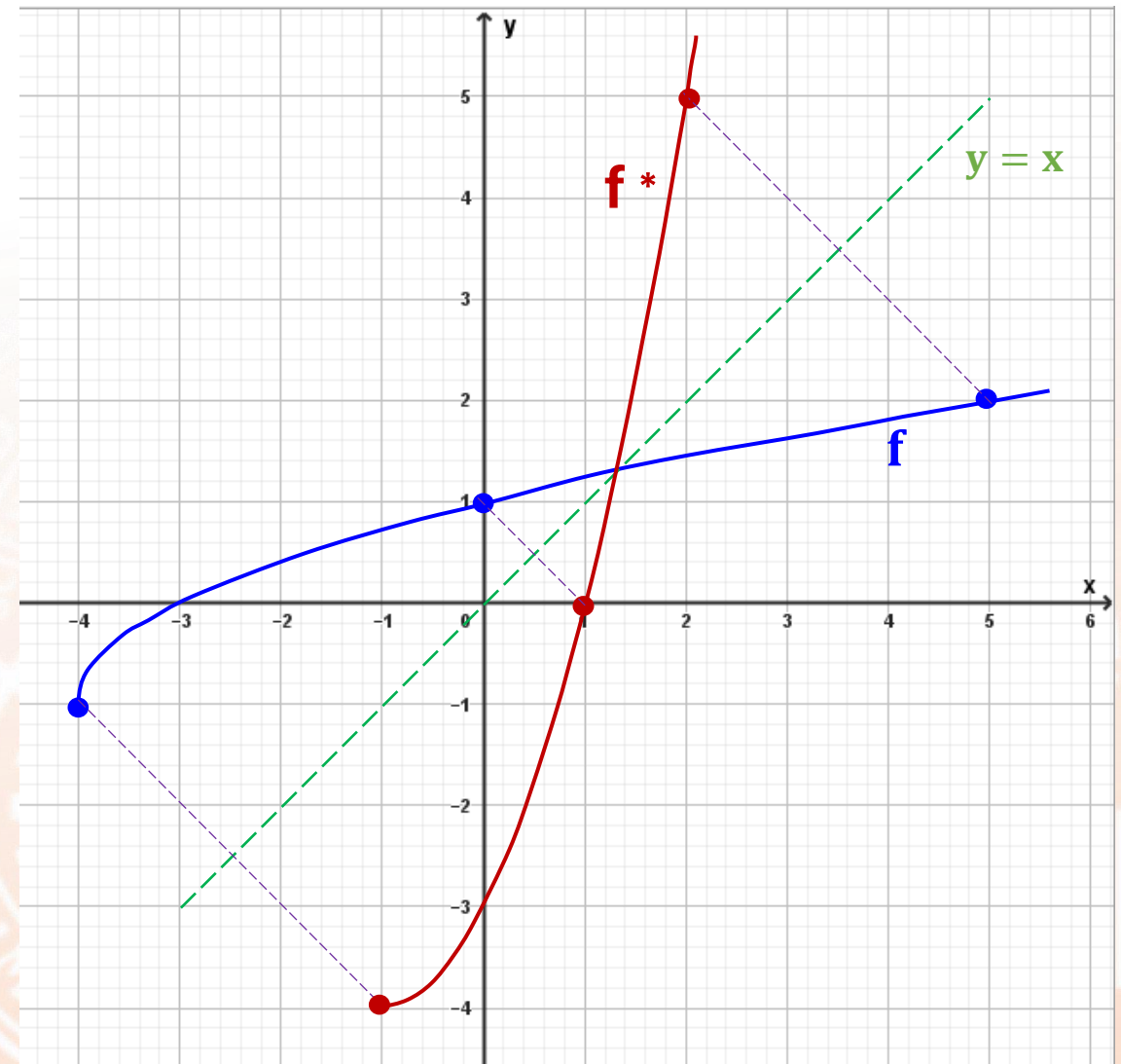
$$f_1(x) = \sqrt{1-x} \ ; x \leq 1 \rightarrow f_1^*(x) = 1 - x^2 \ ; x \geq 0$$

$$f_2(x) = 5 - 2x \ ; x > 3 \rightarrow f_2^*(x) = \frac{5-x}{2} \ ; x < -1$$

$$\therefore f^*(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & ; x \geq 0 \\ \frac{5-x}{2} & ; x < -1 \end{cases}$$

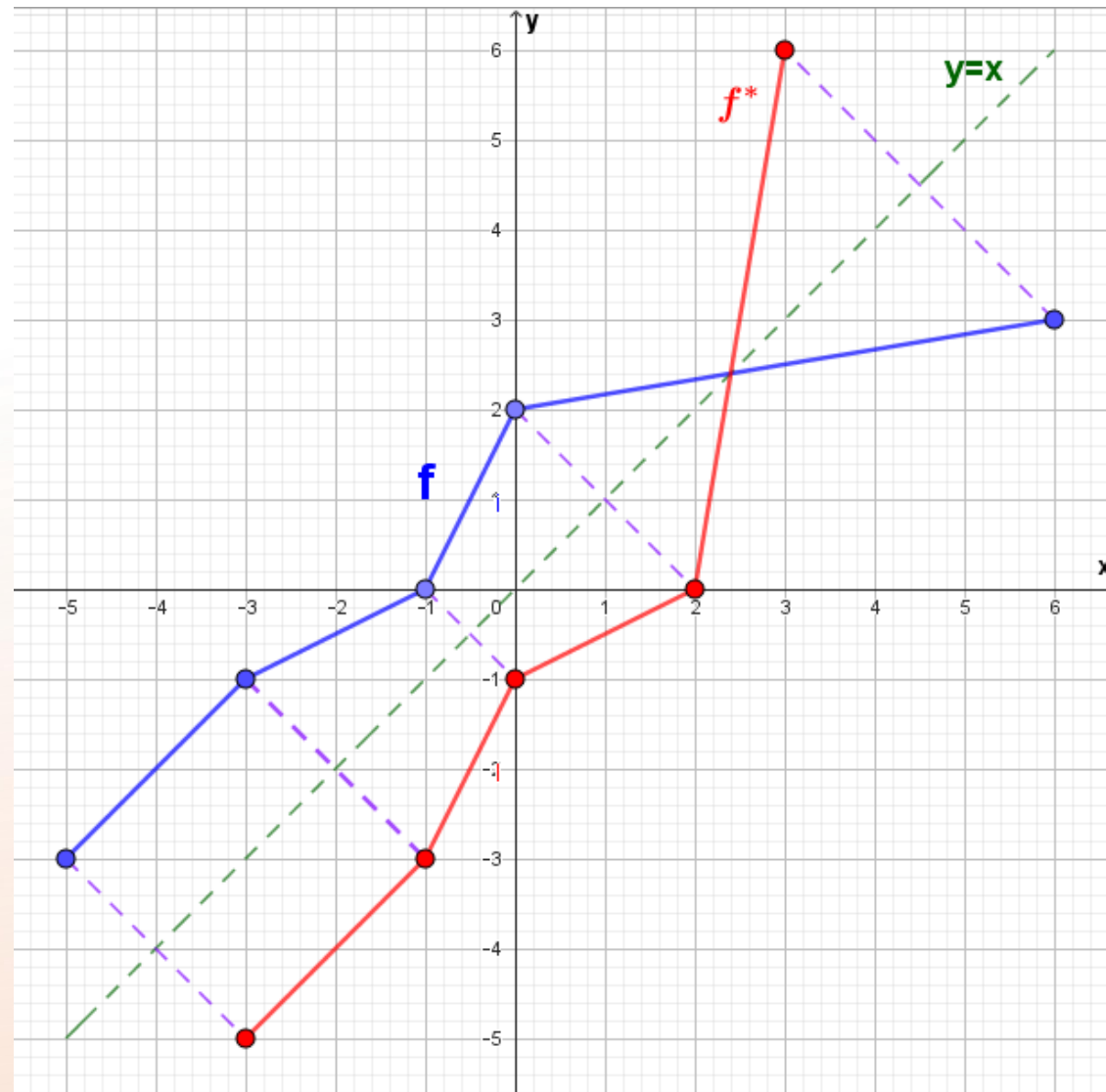
Representación gráfica de la inversa

Conociendo la gráfica de una función f (invertible) se puede determinar la gráfica de su inversa, haciendo una reflexión de la gráfica de f respecto a la función identidad $I(x) = x ; x \in \mathbb{R}$



Ejemplo

Dada la gráfica de la función f , determine la gráfica de la función inversa f^*

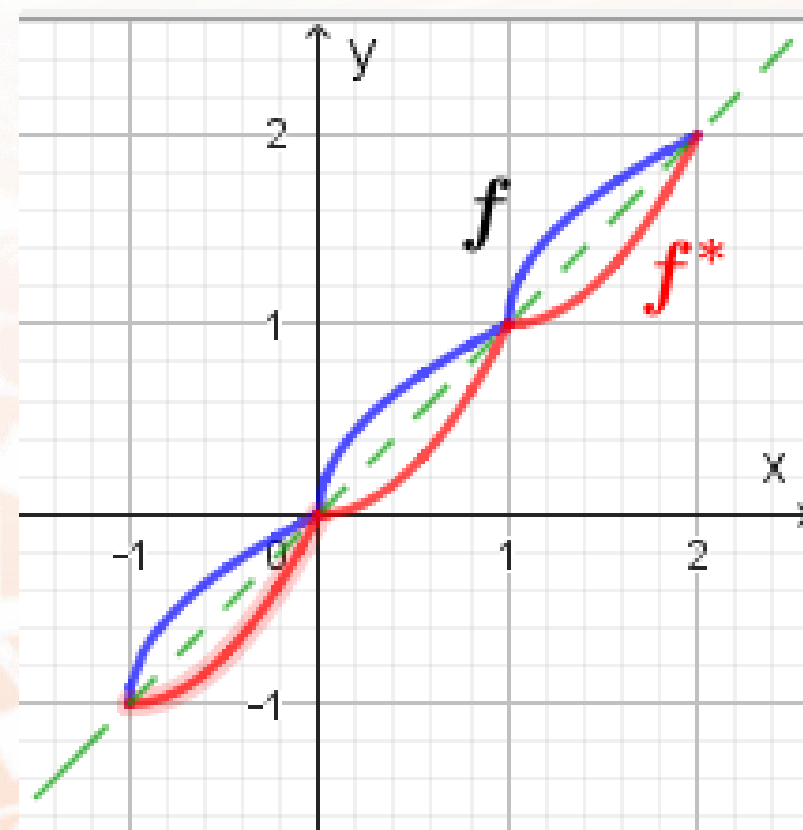


Ejemplo:

Sea la función f definida por $f(x) = \llbracket x \rrbracket + \sqrt{x - \llbracket x \rrbracket}$; $-1 \leq x < 2$, determine la grafica de la inversa de esta función.

Solución

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \sqrt{x+1} & ; -1 \leq x < 0 \\ \sqrt{x} & ; 0 \leq x < 1 \\ 1 + \sqrt{x-1} & ; 1 \leq x < 2 \end{cases}$$



Ejemplo. Dada la función f definida por $f(x) = x + 4\sqrt{x-1} - 2$; $x \in [2; 5]$.
Determine f^* .

Solución

$$f(x) = x - 2 + 4\sqrt{x-1} ; \quad x \in [2; 5].$$

f es creciente (suma de funciones crecientes)

$$\text{Ran}(f) = \text{Dom}(f^*) = [f(2); f(5)] = [4; 11]$$

$$f^*: \quad y = (\sqrt{x-1} + 2)^2 - 5$$

$$(\sqrt{x-1} + 2)^2 = y + 5$$

$$\sqrt{x-1} + 2 = \sqrt{y+5}$$

$$x - 1 = (\sqrt{y+5} - 2)^2$$

$$x = (\sqrt{y+5} - 2)^2 + 1$$

$$x = y + 10 - 4\sqrt{y+5}$$

$$\therefore f^*(x) = x + 10 - 4\sqrt{x+5}; \quad x \in [4; 11]$$

Ejemplo. Sea f la función definida por $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 9}$; $x \geq 3$

a. Verifique que esta función es inyectiva

b. Determine su inversa

Solución

a. Como $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = \sqrt{x}$, $f_3(x) = x^2 - 9$ son crecientes en $[3; \infty)$,
Entonces $f = f_1 + (f_2 \circ f_3)$ es creciente.

Por lo tanto f es inyectiva, y $\text{Ran}(f) = [f(3); \infty) = [6; \infty)$.

b. $y - 2x = \sqrt{x^2 - 9}$; $x \geq 3$

$$3x^2 - 4yx + (y^2 + 9) = 0 ; x \geq 3$$

$$x = \frac{4y \pm 2\sqrt{y^2 - 27}}{6} \rightarrow x = \frac{2y \pm \sqrt{y^2 - 27}}{3}$$

$$f^*(x) = \frac{2x - \sqrt{x^2 - 27}}{3} ; \forall x \geq 6$$

Para la elección del signo, hemos usado
 $f(3) = 6 \Leftrightarrow f^*(6) = 3$

Ejercicio 279 (4ta Práctica Calificada CEPRE-UNI 2022 2)

Dada la función f definida por $f: \langle -9 ; -1 \rangle \rightarrow B / f(x) = -\sqrt{-x}$

Determine el dominio de f^* .

A) $\langle 1 ; 8 \rangle$

B) $\langle 2 ; 7]$

C) $\langle -3 ; -1 \rangle$

D) $\langle 6 ; 9]$

E) $\langle -4 ; \infty \rangle$



Ejercicio 280 (Examen de Admisión UNI 2018 1)

Sea $f(x) = \frac{4x+1}{2x-1}$; $x > \frac{1}{2}$. Halle la función inversa de f denotada por f^* e indique su dominio y rango.

A) $f^*(x) = \frac{2x+1}{x-2}$; $\text{Dom}(f^*) = \langle 3; \infty \rangle$; $\text{Ran}(f^*) = \langle -\infty; \infty \rangle$

B) $f^*(x) = \frac{x-1}{2x-4}$; $\text{Dom}(f^*) = \langle 3; \infty \rangle$; $\text{Ran}(f^*) = \left\langle \frac{1}{2}; \infty \right\rangle$

C) $f^*(x) = \frac{x+1}{2x-4}$; $\text{Dom}(f^*) = \langle 2; \infty \rangle$; $\text{Ran}(f^*) = \left\langle \frac{1}{2}; \infty \right\rangle$

D) $f^*(x) = \frac{x+1}{2x-4}$; $\text{Dom}(f^*) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; $\text{Ran}(f^*) = \left\langle \frac{1}{2}; \infty \right\rangle$

E) $f^*(x) = \frac{x+1}{x+2}$; $\text{Dom}(f^*) = \langle 1; \infty \rangle$; $\text{Ran}(f^*) = \left\langle \frac{1}{2}; \infty \right\rangle$

Ejercicio 282 (4ta Práctica Calificada CEPRE-UNI 2023 1)

Dada la función f definida por $f(x) = -x^2 + 4x - 2$; $x \in [-1; 2]$.

Determine f^* y su dominio.

A) $f^*(x) = -2 - \sqrt{x-2}$; $x \in [0; 2]$

B) $f^*(x) = -2 - \sqrt{x-2}$; $x \in [2; 11]$

C) $f^*(x) = -2 - \sqrt{2-x}$; $x \in [0; 2]$

D) $f^*(x) = 2 - \sqrt{2-x}$; $x \in [-7; 2]$

E) $f^*(x) = 2 - \sqrt{x+2}$; $x \in [2; 11]$